



Wintersemester

H. Donder, A. Fackler, P. Garcia

Analysis III Tutorium

Blatt 9

Definition 1. Seien A offen und $a_0, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ mit $a := a_0 < a_1 < \dots < a_{k-1} < b := a_k$. Seien $F: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld und $\gamma: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow A$ eine stetige Kurve, so dass für jede $i \in \{0, \dots, k-1\}$, $\gamma|_{[a_i, a_{i+1}]}$ stetig differenzierbar ist.

Das Wegintegral von F entlang γ wird als $\int_{\gamma} F \cdot ds := \sum_{i=0}^{k-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$ definiert.

Aufgabe 9.1. Seien A , $a = a_0, \dots, a_k = b$, $F: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\gamma: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow A$ wie in Definition 1. Zeigen Sie, dass es eine 1-Form ω gibt mit $\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} F \cdot ds$.

Aufgabe 9.2. Seien $A \subset \mathbb{R}^n$ offen und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Seien $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ und $\gamma: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow A$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass $\int_{\gamma} \nabla f \cdot ds = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$.

Aufgabe 9.3. Sei $A \subset \mathbb{R}^3$ offen und zusammenhängend und sei $F: A \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld so dass für jede geschlossene Integrationskurve $\gamma: [a, b] \rightarrow A$, $\int_{\gamma} F \cdot ds = 0$. Zeigen Sie, dass $\text{rot } F = 0$.

Aufgabe 9.4. Sei $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch $F(x, y, z) = (y, z \cdot \cos(yz) + x, y \cdot \cos(yz))$. Geben Sie eine Funktion $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\nabla f = F$.



Wintersemester

H. Donder, A. Fackler, P. Garcia

Analysis III Tutorium

Blatt 9. Lösungsskizze

Aufgabe 9.1. Seien $f_1, \dots, f_n: A \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$. Sei $\omega := f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$. Man merkt, dass für $i \in \{0, \dots, k-1\}$ und $t \in (a_i, a_{i+1})$,

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} D_1 \gamma(t) \\ \vdots \\ D_n \gamma(t) \end{pmatrix}. \text{ Deswegen:}$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \sum_{i=0}^{k-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \omega(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} [f_1(\gamma(t)) dx_1 + \dots + f_n(\gamma(t)) dx_n] \cdot \gamma'(t) dt = \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f_1(\gamma(t)) dx_1(\gamma'(t)) + \dots + f_n(\gamma(t)) dx_n(\gamma'(t)) dt = \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f_1(\gamma(t)) D_1 \gamma(t) + \dots + f_n(\gamma(t)) D_n \gamma(t) dt = \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \langle f_1(\gamma(t)), \dots, f_n(\gamma(t)) \rangle \cdot \langle D_1 \gamma(t), \dots, D_n \gamma(t) \rangle dt = \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_{\gamma} F(x) \cdot ds \end{aligned}$$

Aufgabe 9.2. Man merkt, dass $\nabla f(x) = (D_1 f(x), \dots, D_n f(x))$ und deswegen, für $\omega := f' = D_1 f dx_1 + \dots + D_n f dx_n$, nach Aufgabe 9.1, $\int_{\gamma} \nabla f(x) \cdot dx = \int_{\gamma} \omega$. (*)

Auf der andere Seite, ω ist eine 1-Form mit Stammfunktion f und deswegen, nach Theorem der Vorlesung, $\int_{\gamma} \omega = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$. (**)

Nach (*) und (**) folgt die Behauptung.

Aufgabe 9.3. Sei $F = (f_1, f_2, f_3)$ und $\omega := f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3$. Dann ist ω eine stetige 1-Form so dass für jede geschlossene Integrationskurve $\gamma: [a, b] \rightarrow A$,

$\int_{\gamma} \omega \stackrel{\text{Aufgabe 9.1}}{=} \int_{\gamma} F \cdot ds = 0$. Deswegen, nach Theorem der Vorlesung ω besitzt eine Stammfunktion $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, d.h., $\omega = df = D_1 f dx_1 + D_2 f dx_2 + D_3 f dx_3$. Aber das bedeutet

$D_1 f = f_1, D_2 f = f_2, D_3 f = f_3$ und so $\nabla f = F$. Deshalb $\text{rot } F = \text{rot } \nabla f = 0$.

Aufgabe 1.4. Sei ω die 1-Form $\omega := y dx + (z \cdot \cos(yz) + x) dy + (y \cdot \cos(yz)) dz$. Nach dem Beweis von Aufgabe 9.3, wenn ω eine Stammfunktion f besitzt, dann $\nabla f = F$. Es genügt also eine Stammfunktion f von ω zu geben.

Sei $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ und $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = t(x, y, z)$. Falls ω eine Stammfunktion hätte, das wäre

$$f(x, y, z) := \int_{\gamma} \omega = \int_0^1 \omega(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_0^1 t y x + (t z \cdot \cos(t^2 y z) + t x) y + t y \cdot \cos(t^2 y z) z dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 (tyx)dt + \int_0^1 (tzy \cdot \cos(t^2yz))dt + \int_0^1 (txy)dt + \int_0^1 (tyz \cdot \cos(t^2yz))dt = \\
&= 2 \int_0^1 (tyx)dt + 2 \int_0^1 (tzy \cdot \cos(t^2yz))dt = \int_0^1 (2tyx)dt + \int_0^1 (2tzy \cdot \cos(t^2yz))dt = \\
&= [t^2yx]_0^1 + \int_0^{yz} \cos(u)du = yx + \sin(yz) - \sin(0) = yx + \sin(yz).
\end{aligned}$$

Aber $df = ydx + (x + z \cdot \cos(yz))dy + y \cdot \cos(yz)dz = \omega$, also f ist tatsächlich Stammfunktion von ω .